22107221

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Jeudi 20 mai 2010 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 14]*

(a) (i) Une forme du petit théorème de Fermat affirme que, sous certaines conditions,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} .$$

Montrez que ce résultat n'est pas valide pour $a = 4$, $p = 9$ et précisez quelle condition n'est pas satisfaite.

(ii) Étant donné que $5^{64} \equiv n \pmod{7}$, avec $0 \le n \le 6$, trouvez la valeur de n. *[8 points]*

(b) Trouvez la solution générale du système de congruences

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$
$$3x \equiv 2 \pmod{5} .$$

[6 points]

2. *[Note maximale : 9]*

Un graphe G de sommets A, B, C, D, E a la matrice d'adjacence des coûts suivante.

	A	B	C	D	E
A	–	12	10	17	19
B	12	–	13	20	11
C	10	13	–	16	14
D	17	20	16	–	15
E	19	11	14	15	–

(a) (i) Utilisez l'algorithme de Kruskal pour trouver et dessiner l'arbre couvrant minimal de G.

(ii) Le graphe H est formé à partir de G en enlevant le sommet D et toutes les arêtes liées à D. Dessinez l'arbre couvrant minimal de H et utilisez-le pour trouver une borne inférieure pour le problème du voyageur de commerce de G. *[7 points]*

(b) Montrez que 80 est une borne supérieure pour ce problème du voyageur de commerce. *[2 points]*

3. *[Note maximale : 12]*

L'entier positif N s'écrit en base 9 comme $(a_n a_{n-1} \ldots a_0)_9$.

(a) Montrez que N est divisible par 3 si son chiffre le moins significatif, a_0, est divisible par 3. *[3 points]*

(b) Montrez que N est divisible par 2 si la somme de ses chiffres est paire. *[3 points]*

(c) Sans faire une conversion en base 10, déterminez si $(464860583)_9$ est ou n'est pas divisible par 12. *[6 points]*

4. *[Note maximale : 18]*

(a) Montrez que, pour un graphe connexe planaire,

$$v + f - e = 2.$$

[7 points]

(b) En supposant que $v \geq 3$, expliquez pourquoi, pour un graphe connexe planaire simple, $3f \leq 2e$ et à partir de là, déduisez-en que $e \leq 3v - 6$. *[4 points]*

(c) Le graphe G et son complément G' sont des graphes connexes simples, chacun avec 12 sommets. Montrez que G et G' ne peuvent pas être tous les deux planaires. *[7 points]*

5. *[Note maximale : 7]*

Étant donné que a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$, montrez que

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \equiv 0 \pmod 3.$$